MODEL MATEMATIKA MANGSA-PEMANGSA DENGAN SEBAGIAN MANGSA SAKIT

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

SITI KHOLIPAH
10854003051

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2013

MODEL MATEMATIKA MANGSA-PEMANGSA DENGAN SEBAGIAN MANGSA SAKIT

<u>SITI KHOLIPAH</u>
10854003051

Tanggal Sidang : 26 Juni 2013
Periode Wisuda : 2013

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini menjelaskan tentang model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit, dimana laju penularan penyakit menggunakan persamaan non-liniear yaitu $\frac{PXY}{Q+X}$. Pada model matematika mangsa-pemangsa ini, di asumsikan adanya mangsa sehat, mangsa sakit, dan untuk pemangsa hanya memangsa mangsa sakit. Hasil yang diperoleh pada model matematika mangsa-pemangsa ini yaitu stabil asimtotik apabila $2\frac{k-1+\alpha}{\alpha} < x^* < \frac{1}{2}$.

Kata Kunci : *Model Mangsa-Pemangsa, Stabil Asimtotik, Titik kesetimbangan.*

A PREY PREDATOR MODEL WITH VULNERABLE INFECTED PREY

SITI KHOLIPAH
10854003051

Date of Final Exam : 26 Juni 2013

Graduation Ceremony Period : 2013

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
JL. HR. Soebrantas no. 155 Pekanbaru

ABSTRACK

This thessis discusses about A prey predator model with vulnerable infected prey where for incidence rate of susceptible prey use a non-liniear feedback that is $\frac{PXY}{Q+X}$. *In this model predator-prey is assumed that has prey, infected prey, and for predator in ineract with infected prey. The result obtained with model mathematic is that Asymptotic Stable when* $2\frac{k-1+\alpha}{\alpha} < x^* < \frac{1}{2}$.

Key word *: A prey predator model, Asymptotic Stable, Equilibrium Point.*

KATA PENGANTAR

Assalamua'laikum Wr.Wb

Alhamdulillahirobbil'alamin, puji syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan judul **"Model Matematika Mangsa-Pemangsa dengan Sebagian Mangsa Sakit"**. Shalawat berserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua mendapat syafa'at-nya kelak Amin.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis banyak sekali mendapat bimbingan, bantuan, nasehat, perhatian serta semangat dari berbagai pihak baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa hormat dan berterimakasih sebesar-besarnya kapada:

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc selaku pembimbing yang telah banyak memberikan bantuan, meluangkan banyak waktu kepada penulis, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Bapak Wartono, M.Sc selaku penguji I yang telah memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
6. Yuslenita Muda, M.Sc selaku penguji II yang telah memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini hingga selesai.
7. Semua Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah membimbing penulis selama kuliah.

8. Ayah ku yang tercinta (Alm Abd. Rahman), meskipun kini telah tiada lagi di sisi keluarga namun dengan didikannya dan kasih sayangnya anak mu dapat berjalan dengan kuat dalam menghadapi berbagai rintangan dan cobaaan dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
9. Bundaku tersayang (Kalinem), Kasih sayang, motivasi dan doa mu yang tak pernah henti–hentinya diberikan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
10. Kakakku (Nurbaiti, Rubiana, Syamsiah, dan Syamsulaidar), abang ipar ku (Mustakim, Wahyudi, Maryoto, dan Hendrik), Abang (Muzahid) dan adekku (Siti Hamlah, M.R. Azali), beserta Keponakanku yang lucu–lucu yang tak pernah henti–hentinya memberikan kasih sayang perhatian dan doanya kepada penulis.
11. Sahabat sekaligus saudara ku (Nuriza, Tika, Olive, Rizal, Alcha, Iis, Wardi, Ade, Eby, Morda, Ema, Ima, Imam) terima kasih atas bantuan, dorongan dan motivasi yang di berikan dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
12. Teman-teman jurusan matematika angkatan 2008, kakak dan adik tingkat jurusan matematika yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, tetap semangat untuk mencari Ilmu, semoga kita menjadi Generasi yang bermanfaat bagi Nusa dan Bangsa Indonesia.

Dengan segala keterbatasan ilmu yang penulis miliki, Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tugas akhir ini masih terdapat kekurangan dan kesalahan, oleh karena itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini. Akhirnya, penulis berharap tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pihak yang memerlukannya.

Pekanbaru, 27 Juni 2013
Penulis

Siti Kholipah

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pemodelan matematika merupakan salah satu cabang dari matematika terapan yang cukup penting dan bermanfaat. Banyak permasalahan yang dijumpai dalam kehidupan nyata yang dapat di terapkan langsung ke dalam bentuk model matematika, sehingga dapat membuat prediksi dan pengendalian tentang prilaku objek dimasa depan.

Salah satu bentuk pemodelan yang dapat diterapkan yaitu pada masalah ekologi, cabang biologi yang mempelajari tentang ekosistem. Dalam ekologi juga dikenal istilah rantai makanan. Rantai makanan merupakan lintasan konsumsi makanan yang terdiri dari beberapa spesis organisme.

Bagian paling sederhana dari suatu rantai makanan yakni interaksi, seperti interaksi antara mangsa dan pemangsa. Populasi mangsa mempunyai persediaan makanan yang tersedia cukup di dalam lingkungannya, sedangkan pada populasi pemangsa memiliki makanan yang bergantung pada jumlah mangsa. Apabila populasi mangsa terbatas maka untuk populasi pemangsa akan menurun sesuai dengan jumlah proporsi mangsanya.

Populasi mangsa pada umumnya dapat digolongkan lagi menjadi dua kelompok yakni mangsa sehat dan mangsa sakit. Mangsa yang sehat biasanya memiliki kemampuan untuk lolos ketika sedang di buru oleh pemangsa. Mangsa yang sakit tidak memiliki daya tahan tubuh yang kuat atau tidak dapat melakukan pelarian dengan kecepatan yang lebih besar dibanding mangsa yang sehat.

Model dasar tentang mangsa pemangsa pertama kali dirumuskan oleh *A. J Lotka* dan *Vito Volterra* (1920), yang disebut model *Lotka Volterra*. Pada model *Lotka Volterra* populasi dibagi menjadi dua kelas yaitu kelas pemangsa dan kelas mangsa. Secara matematika kelas mangsa ditulis dengan $x(t)$ yaitu banyaknya mangsa pada saat t, dan kelas pemangsa $y\ t$ merupakan banyaknya pemangsa pada saat t, sedangkan t merupakan waktu.

Model *Lotka Volterra* pada awalnya dikembangkan untuk mengetahui laju perkembangan dan kepunahan suatu populasi mangsa yang dimakan pemangsa. Populasi mangsa memiliki makanan yang tersedia setiap saat tetapi pada populasi pemangsa bisa bertahan hidup dengan memakan mangsa.

Model matematika mangsa-pemangsa *Lotka Volterra* telah banyak dikembangkan, salah satunya adalah *analisis sistem persamaan differensial model predator-prey dengan perlambatan*, oleh V.A. Fitria (2001). Jurnal ini membahas tentang model mangsa-pemangsa dengan adanya waktu perlambatan. Jurnal berikutnya adalah *A mathematical study of a predator-prey dynamics with diseases in predator,* oleh Krishna Pada Das, yang membahas tentang model mangsa dan dua pemangsa dengan laju penularan penyakit non-liniear yang terdapat pada pemangsa. Jurnal mangsa-pemangsa seterusnya yakni *Persistence of predator in a two Predators- one prey model with model non priodic solution* oleh Jawdat Alebraheem dan Yahya Abu-Hasan (2012), pada jurnal ini dibahas tentang kesetabilan dari setiap model mangsa-pemangsa dengan tipe-II holling dan kolmogorov.

Jurnal lain yang membahas tentang model matematika mangsa-pemangsa yang berjudul *A Prey Predator Model with Vulnerable Infected Prey* oleh S.A Wuhaib dan Y. Abu Hasan (2012). Jurnal ini membahas tentang model mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit, dengan laju penularan penyakit menggunakan biliniear yaitu PXY.

Berdasarkan latar belakang di atas maka penulis tertarik untuk mengulas dan mengembangkan, dari jurnal S.A Wuhaib dan Y. Abu Hasan dengan judul: “Model Matematika Mangsa-Pemangsa dengan Sebagian Mangsa Sakit” dengan menambahkan asumsi Q yang menyatakan parameter yang mengukur efek jenuh insidensi secara konstan, dengan laju Penularan penyakit menggunakan non-liniear yaitu $\frac{PXY}{Q+X}$.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penyelesaian proposal tugas akhir ini adalah:

a) Bagaimanakah menentukan model matematika dari sistem mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit yang menggunakan persamaan non-liniear.
b) Bagaimanakah menganalisis kestabilan titik ekuilibrium pada model matematika mangsa-pemangsa pada poin (a).
c) Bagaimana simulasi pengaruh perubahan parameter model matematika mangsa-pemangsa pada point (a).

1.3 Batasan Masalah

Agar penulisan pada tugas akhir ini menjadi terarah, permasalahan dibatasi pada asumsi penularan penyakit dari mangsa sehat ke mangsa sakit terjadi secara non-liniear dalam bentuk $\frac{PXY}{Q+X}$. Dengan P menyatakan laju penularan penyakit, X menyatakan mangsa rentan sakit, Y menyatakan mangsa terinfeksi, dan Q merupakan parameter yang mengukur efek jenuh insidensi secara konstan.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah:

a) Memperoleh model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit.
b) Mengetahui kestabilan titik ekuilibrium pada model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit.
c) Mengetahui simulasi pengaruh perubahan parameter model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada proposal tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab yaitu :

Bab I Pendahuluan

Bab pendahuluan ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang teori-teori yang mendukung dalam pembuatan tugas akhir ini, seperti sistem persamaan diferensial, titik kestimbangan (*ekuilibrium*), kestabilan titik kestimbangan (*ekuilibrium*), dan model mangsa-pemangsa.

Bab III Metodologi

Bab ini menguraikan tentang langkah-langkah yang penulis gunakan untuk menyelesaikan tugas akhir ini.

Bab IV Pembahasan.

Bab ini berisikan pembahasan mengenai model matematika dalam memodelkan mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dan saran-saran yang diperoleh dari hasil tugas akhir ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pemodelan matematika merupakan salah satu terapan ilmu matematika yang dapat memodelkan permasalahan didalam kehidupan nyata, termasuk pada permasalahan ekologi yaitu tentang interaksi mangsa-pemangsa.

Beberapa teori yang dibutuhkan untuk membahas model matematika mangsa-pemangsa pada tugas akhir ini diantaranya adalah:

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, sedangkan sistem persamaan diferensial terdiri dari beberapa persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial menurut bentuknya terbagi menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial liniear dan sistem persamaan diferensial non-liniear. Di bawah ini diberikan bentuk umum sistem persamaan diferensial yang non-linear dan linear, yang terdiri dari n persamaan adalah:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n \end{aligned} \qquad \ldots \quad (2.1)$$

dengan f_i adalah fungsi non-liniear, untuk $i = 1,2,\ldots,n$. Sistem ini mempunyai penyelesaian jika f_i merupakan fungsi kontinu.

Sistem (2.1) secara sederhana dapat ditulis sebagai berikut:

$$\dot{x} = f\ \ x \qquad \cdots \quad (2.2)$$

Dengan $\dot{x} = \ \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}\ ^T$, $x = \ x_1, x_2, \ldots, x_n\ \ \in \mathbb{R}^n$, dan $f = \ f_1, f_2, \ldots, f_n$

Sistem (2.1) dikatakan liniear jika hanya jika $f_1, f_2, \ldots, f_n$ masing – masing linear dalam $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sistem $\dot{x} = f(x)$ disebut sistem persamaan differensial linear yang dapat dituliskan sebagai

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\
\dot{x_2} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
\dot{x_n} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned}
\qquad \ldots \quad (2.3)
$$

Sistem (2.3) dapat dinyatakan dalam bentuk $\dot{x} = Ax$, dengan A matriks $n \, x \, n$ dan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ dan sistem $\dot{x} = f(x)$ disebut sistem nonlinear jika tidak dapat dinyatakan dalam bentuk sistem (2.3).

2.2 Titik Kesetimbangan *(Equilibrium)* Dan Kestabilan Titik Kesetimbangan

Suatu sistem dinamis dikatakan berada dalam keadaan setimbang jika sistem tersebut tidak berubah sepanjang waktu atau kedua persamaan diferensial sama dengan nol. Oleh karena itu, suatu populasi dikatakan berada dalam keadaan setimbang jika jumlah populasi tersebut tidak berubah sepanjang waktu. Adapun definisi tentang kesetimbangan adalah sebagai berikut ini:

Definisi 2.1. (Meiss, 2007) Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan (titik *equilibrium*) sistem $\dot{x} = f(x)$ jika $f(\bar{x}) = 0$.

Konsep perilaku sistem pada titik kesetimbangan (*equilibrium*) dikenal sebagai kestabilan titik kesetimbangan. Kestabilan tersebut merupakan informasi untuk menggambarkan perilaku sistem, apakah dalam jangka waktu yang lama populasi mangsa dan pemangsa akan menuju ke titik kesetimbangan (*equilibrium*) bebas mangsa atau endemik. Di bawah ini definisi secara formal mengenai kestabilan titik kesetimbangan:

Definisi 2.2. (Hale, 1991) Titik kesetimbangan (*equilibrium*) $\bar{x} \in R^n$ dari sistem $\dot{x} = f(x)$ dikatakan :

a. Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi sistem $\dot{x} = f(x)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ maka berakibat $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.
b. Stabil asimtotik lokal jika titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$ maka berakibat $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$.
c. Tidak stabil jika titik e*quilibrium* $\bar{x} \in R^n$ tak memenuhi *(a).*

Jika untuk sembarang titik awal, solusi sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ maka titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil global. Sementara itu jika untuk sembarang titik awal, solusi sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ dan untuk t membesar menuju tak hingga $x(t)$ konvergen ke $\bar{x} \in R^n$, maka titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ stabil asimtotik global.

Sifat kestabilan titik *equilibrium* dapat didekati dengan menggunakan metode linearisasi. Metode ini digunakan untuk mengetahui perilaku sistem persamaan diferensial yang tidak dapat ditentukan penyelesaian eksaknya. Sebelum penyelesaian dengan metode linearisasi, perlu ditentukan terlebih dahulu matriks Jacobian di titik $\bar{x}$. Di bawah ini diberikan definisi matriks Jacobian di titik $\bar{x}$.

Definisi 2.3. (Hale, 1991) Diberikan $f = (f_1, \dots, f_n)$ pada sistem $\dot{x} = f(x)$ di atas dengan $f_i \in c^1(E)$, $i = 1,2,\dots,n$.

$$Jf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix},$$

dinamakan matriks Jacobian dari f di titik $\bar{x}$.

Definisi 2.4. (Anton, 1998) Jika A adalah matriks $n\,x\,n$, maka vektor tak nol x didalam R^n disebut vektor eigen dari A, jika untuk suatu skalar λ, yang disebut nilai eigen dari A diperoleh $Ax = \lambda x$.

Definisi 2.5. (Anton, 1998) Vektor x disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen x.

Setelah matriks Jacobian diperoleh, maka untuk langkah selanjutnya adalah penyelesaian dengan metode linearisasi. Berikut definisi mengenai metode linearisasi :

Definisi 2.6. (Meiss, 2007) Sistem $\dot{x} = J\big(f(\bar{x})\big)\, x$ disebut linearisasi sistem $\dot{x} = f(x)$ di $(\bar{x})$.

Dengan menggunakan matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$, sifat kestabilan titik *equilibrium* $\bar{x}$ dapat diketahui asalkan titik tersebut hiperbolik. Berikut diberikan definisi titik hiperbolik.

Definisi 2.7. (Meiss, 2007) Titik equilibrium $\bar{x}$ disebut titik equilibrium hiperbolik jika semua nilai eigen $Jf(\bar{x})$ mempunyai bagian real tak nol.

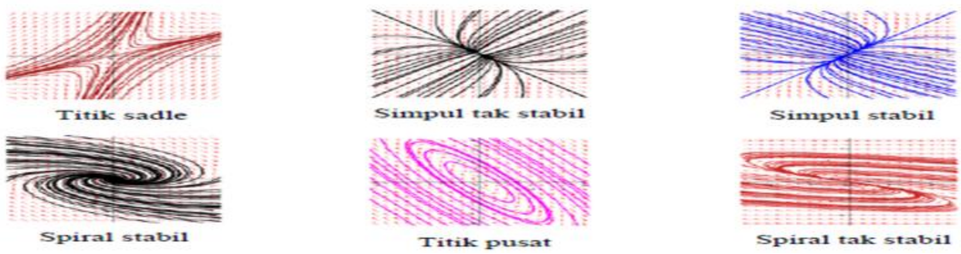
Kestabilan dari titk *equilibrium* pada sistem $\dot{x} = f(x)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian pada metode linearisasi. Nilai eigen dapat ditentukan melalui persamaan karakterisrik dari matriks Jacobian di titik $\bar{x}$. Kriteria kestabilan titik *equilibrium* pada sistem $\dot{x} = f(x)$ tersebut disajikan pada teorema dibawah ini :

Teorema 2.1. (Hale, 1991)

a) Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real negatif, maka titik equilibrium $\bar{x}$ dari sistem $\dot{x} = f(x)$ stabil asimtotik.
b) Jika terdapat nilai eigen dari matriks $J(f(\bar{x}))$ mempunyai bagian real positif, maka titik equilibrium $\bar{x}$ dari sistem $\dot{x} = f(x)$ tidak stabil.

Tabel 2.1. Kriteria titik kestimbangan, dan kesatabilan berdasarkan nilai eigen.

Nilai eigen	Nama	Kestabilan
real, tidak sama, bertanda sama	simpul	stabil asimptotis: semuanya negatif tidak stabil: semuanya positif
real, tidak sama, berlawanan tanda	sadel	tidak stabil
real, sama	simpul	stabil asimptotis: semuanya negatif tidak stabil: semuanya positif
kompleks konjugate bukan imajiner murni	spiral	stabil asimptotis: bagian real negatif tidak stabil: bagian real positif
imajiner murni	pusat	stabil



Contoh kestabilan titik kesetimbangan untuk sistem linear dua variabel terikat. Pandang Sistem linear :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \ldots \quad (2.4)$$

dengan a, b, c dan d konstan. Misalkan λ nilai eigen dari Matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0, \qquad \ldots \quad (2.5)$$

Berdasarkan persamaan (5) di atas, diperoleh

$$\lambda_{1.2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2},$$

atau

$$\lambda_{1.2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

dengan $p = a + d$ dan $q = ad - bc$.

Stabilitas sistem linier $\dot{x} = f(x)$ dapat diterangkan sebagai berikut:

1). $\lambda_{1.2}$ real dan berbeda jika $\Delta = p^2 - 4q > 0$

a. $\lambda_{1.2}$ sama tanda jika $q > 0$:

a). $\lambda_{1.2}$ semua negatif jika $p < 0 \rightarrow$ stabil.

b). $\lambda_{1.2}$ semua positif jika $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.

b. $\lambda_{1.2}$ beda tanda jika $q < 0 \rightarrow$ tidak stabil.

c. Salah satu dari $\lambda_{1.2}$ nol, jika $q = 0$.

a). Akar lainnya positif jika $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.

b). Akar lainnya negatif jika $p < 0 \rightarrow$ stabil netral.

2). $\lambda_{1.2}$ real dan sama jika $\Delta = 0$.

a. $\lambda_{1.2}$ sama tanda :

a). Keduanya positif jika $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.

b). Keduanya negatif jika $p < 0 \rightarrow$ stabil.

b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, bila $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.

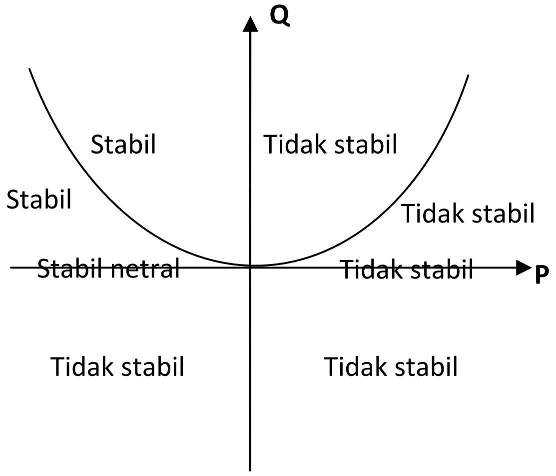
3). $\lambda_{1.2}$ kompleks bila $\Delta < 0$.

a. Re $\lambda_{1.2}$ sama tanda :

  a). Re $\lambda_{1.2}$ semua positif bila $p > 0 \rightarrow$ tidak stabil.

  b). Re $\lambda_{1.2}$ semua negatif bila $p < 0 \rightarrow$ stabil.

b. Re $\lambda_{1.2}$ bila $p = 0 \rightarrow$ stabil netral



Gambar 2.1. Bidang fase Sistem linier

Jika persamaan karakteristik pada matrik yang di peroleh cukup rumit untuk menentukan akar-akar karakteristik dari nilai eigen-nilai eigen maka untuk mencari apakah nilai eigen bernilai negatif dapat menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Teorema 2.2. Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz

Di berikan persamaan karakteristik dengan orde ke-n yaitu $P\ \lambda = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ untuk $n = 2$, kondisi Routh-Hurwitz adalah sebagai berikut $a_1 > 0, a_2 > 0$, dan untuk $n = 3$ maka kondisi Routh-Hurwitz adalah $a_3 > 0, a_1 > 0, a_1a_2 > a_3$. Jika Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik ekuilibrium stabil asimtotik lokal.

2.3 Model Mangsa-Pemangsa

Banyak sistem interaksi yang berlangsung dalam ekosistem alami, salah satunya adalah sistem interaksi mangsa-pemangsa. Pemangsa adalah sejenis hewan yang memburu, menangkap dan memakan hewan yang lain. Mangsa merupakan hewan yang di jadikan sebagai buruan bagi pemangsa *(id.wikipedia.org/wiki/pemangsa).* Sedangkan pada kamus indonesia mangsa adalah daging binatang buas.

Pemangsa merupakan *spesies* pemangsa yang secara fisik ukurannya lebih besar dibandingkan dengan mangsa, sedangkan mangsa adalah *spesies* yang dimangsa yang ukurannya lebih kecil daripada pemangsa. Sebagai contoh model mangsa-pemangsa diantaranya yaitu tikus-kucing dan rusa-singa. Salah satu contoh lain dari mangsa-pemangsa yaitu kelinci (mangsa) yang mempunyai makanan yang cukup dan serigala (pemangsa) yang membutuhkan mangsa sebagai makanannya.

Gambar di bawah ini mengilustrasikan interaksi mangsa-pemangsa antara kelinci dan serigala:

Gambar 2.2. Mangsa-pemangsa

Ilustrasi kelinci dan serigala pada gambar diatas dapat dimodelkan ke dalam bentuk model matematika. Banyaknya mangsa (x untuk kelinci) pada saat t yang dapat di notasikan pada $x(t)$ dan $y(t)$ adalah banyaknya pemangsa (y untuk serigala) pada saat t.

Misalkan tidak ada serigala, maka yang akan terjadi adalah kehidupan kelinci akan tumbuh berkembang seiring dengan persediaan makanan yang dimiliki. Keadaan seperti ini bisa ditulis ke bentuk persamaan:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x$$

Apabila tidak ada kelinci, maka populasi serigala akan berkurang dengan laju sebanding dengan populasinya. keadaan ini bisa ditulis dengan persamaan:

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y$$

Laju pertumbuhan alami mangsa tanpa adanya memperhitungkan adanya pemangsa dinotasikan pada α, sedangkan γ merupakan laju kematian alami pada pemangsa.

Karena terjadi interaksi di antara kedua populasi, maka dapat kita modelkan kedalam persamaan akan menjadi:

Persamaan mangsa $\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$ ... (2.6)

persamaan pemangsa $\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy$ ... (2.7)

Dengan β adalah laju kematian mangsa yang bergantung pada pemangsa dan jumlah mangsa yang ada, dan pada δ sebagai laju pertumbuhan pemangsa dengan adanya mangsa. simbol dari jumlah pemangsa adalah y dan untuk jumlah mangsa disimbolkan dengan x. Pertumbuhan mangsa dan pemangsa di simbolkan dengan $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$.

Beberapa persyaratan yang diasumsikan pada model mangsa-pemangsa ini yaitu :

1. Populasi mangsa memiliki makanan yang tersedia setiap saat untuk setiap jumlah populasi, artinya pemangsa dapat mengkonsumsi mangsa dengan jumlah yang tak terhingga.
2. Pemangasa bergantung kepada populasi mangsa sebagai sumber makanan, artinya populasi pemangsa akan mati kelaparan ketika tidak adanya populasi mangsa.
3. Pertambahan populasi alami proporsional untuk setiap ukuran populasi.

Berdasarkan uraian di atas maka untuk sistem mangsa-pemangsa dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy \qquad \ldots \quad (2.8)$$

Setelah diperoleh sistem persamaan diferensial dari model di atas, maka akan dicari titik keseimbangannya, sebagai berikut:

1. Titik kesetimbangan E_0 bisa didapat ketika tidak ada mangsa maka akan terjadi pemangsa mati, sehingga Jumlah mangsa $x^{*} = 0$ Jumlah pemangsa $y^{*} = 0$. Dapat pula ditulis untuk titik kesetimbangannya $E_0^{*}\ 0,0$.
2. Titik kesetimbangan E_1 bisa diperoleh bahwa untuk mangsa ada sehingga pemangsa bisa hidup, maka untuk sistem (2.8) di beri nilai atau sama dengan nol. Dapat di selesaikan sebagai berikut :

Jumlah mangsa $x = 1$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\alpha x - \beta xy = 0$$

$$\beta y = \alpha$$

$$y^{*} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Jumlah pemangsa $y = 1$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy$$

$$-\gamma y + \delta xy = 0$$

$$\delta x = \gamma$$

$$x^{*} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Berdasarkan penyelesaian di atas diperoleh titik kesetimbangan pada sistem (2.8), dimana untuk mangsa ada dan pemangsa bisa bertahan untuk hidup yang dinotasikan dengan $E_1^{*}(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$.

Setelah titik kestimbangan diperoleh, maka selanjutnya akan diselidiki kestabilan titik kestimbangan. Kestabilan titik kestimbangan pada model rantai makanan mangsa-pemangsa kelinci-serigala di atas dapat dilihat pada uraian di bawah ini :

Dimisalkan :

$$f(x,y) = \alpha x - \beta xy$$
$$g(x,y) = -\gamma y + \delta xy$$

Kemudian masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabel pada fungsi masing-masing seperti di bawah ini:

1) Fungsi $f(x,y)$ diturunkan terhadap variabel x:

$$\frac{f(x,y)}{\partial x} = \frac{\alpha x - \beta xy}{\partial x} = \alpha - \beta y$$

2) Fungsi $f(x,y)$ diturunkan terhadap variabel y

$$\frac{f(x,y)}{\partial y} = \frac{\alpha x - \beta xy}{\partial y} = -\beta x$$

3) Fungsi $g(x,y)$ diturunkan terhadap variabel x

$$\frac{g(x,y)}{\partial x} = \frac{-\gamma y + \delta xy}{\partial x} = \delta y$$

4) Fungsi $g(x,y)$ diturunkan terhadap variabel y

$$\frac{g(x,y)}{\partial y} = \frac{-\gamma y + \delta xy}{\partial y} = -\gamma + \delta x$$

Selanjutnya dibentuk kedalam matriks Jacobian, sehingga:

$$Jf(x,y) = \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{matrix}$$

Setelah masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabelnya, maka matriks $Jf(x,y)$ di atas menjadi:

$$Jf(x,y) = \begin{matrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{matrix}$$

Untuk mengetahui sifat titik kestimbangan dimasa yang akan datang, maka titik kestabilan harus di uji kestabilannya dari nilai eigen-nilai eigen. Hal ini dilakaukan dengan mensubtitusikan setiap titik kestimbangan $E_0^*(0{,}0)$ dan $E_1^*(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ kedalam matriks Jacobian yang telah diperoleh di atas, yang akan di uraikan di bawah ini:

1. Untuk menyelidiki titik kestimbangan pada $E_0^*(0{,}0)$ memiliki matriks Jacobian sebagai berikut :

$$Jf(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y^* & -\beta x^* \\ \delta y^* & -\gamma + \delta x^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha - \beta\, 0 & -\beta\, 0 \\ \delta\, 0 & -\gamma + \delta\, 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Setelah matriks Jacobian dilengkapi maka langkah selanjutnya adalah mencari $\det(\lambda I - Jf(x^*, y^*)) = 0$ untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks Jacobian, sebagai berikut:

$$\lambda I - Jf(x^*, y^*) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - Jf(x^*, y^*)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda - \alpha & 0 \\ 0 & \lambda + \gamma \end{pmatrix}$$

Langkah pada selanjutnya adalah mencari $\det(\lambda I - Jf(x^*, y^*)) = 0$

$$det \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & 0 \\ 0 & \lambda + \gamma \end{vmatrix} = 0$$

Berdasarkan determinan matriks di atas maka diperoleh persamaan karakteristiknya yaitu $(\lambda - \alpha)(\lambda + \gamma) = 0$, sehingga dapat ditentuka nilai eigen-nilai eigen dari persamaan karakteristik di atas $\lambda_1 = \alpha$ dan $\lambda_2 = -\gamma$, sehingga dapat disimpulkan bahwa kestimbangan $E_0(0{,}0)$ tidak stabil. Hal ini berarti bahwa dalam waktu yang cukup lama tidak ada populasi mangsa sehingga akan terjadi bahwa untuk populasi pemangsa juga akan musnah.

2. Pada titik kestimbangan $E_1^*(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ akan diperoleh penyelesaian matriks Jacobian seperti di bawah ini:

Sama seperti penyelesaian pada titik kestimbangan E_0, maka akan ditentukan matriks Jacobian dari penurunan parsial pada f dan g di atas.

$$Jf(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y^* & -\beta x^* \\ \delta y^* & -\gamma + \delta x^* \end{pmatrix}$$

Oleh karena untuk titik kestimbangan $E_1^*(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$, maka matriks di atas berubah menjadi:

$$Jf\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) & -\beta\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \\ \delta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) & -\gamma + \delta\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha - \alpha & -\beta\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \\ \delta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) & -\gamma + \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\beta\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \\ \delta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks Jacobian di atas, maka dicari det $(\lambda I - Jf(x, y)) = 0$

$$\lambda I - Jf(x, y) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\beta\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \\ \delta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & \frac{\beta\gamma}{\delta} \\ -\frac{\delta\alpha}{\beta} & \lambda \end{pmatrix}$$

det $(\lambda I - Jf(x, y)) = 0$, berarti dapat ditulis sebagai berikut:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \frac{\beta\gamma}{\delta} \\ -\frac{\delta\alpha}{\beta} & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Persamaan karakteristik dari penyelesaian matriks Jacobian sebagai berikut:

$$\lambda^{2} - \frac{\beta\gamma}{\delta} . - \frac{\delta\alpha}{\beta} = 0$$

$$\lambda^{2} + 0 + \gamma\alpha = 0$$

Nilai eigen pada persamaan karakteristik di atas dapat dihitung sebagai berikut:

$$\lambda_{1.2} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4\ \alpha\gamma}}{2}$$

Diperoleh bahwa untuk titik kestimbangan E_1 $\lambda_1 = +i\sqrt{\alpha\gamma}$, dan $\lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\gamma}$. Hal ini berarti bahwa untuk nilai eigen-nilai eigen dari matriks Jacobian di atas membentuk bagian real tak nol, sehingga kestabilan titik kestimbangan tidak dapat disimpulkan dengan menggunakan metode liniearisasi.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur atau mempelajari literatur yang berhubungan dengan pemodelan matematika yaitu:

a) Membentuk asumsi-asumsi dan mendefinisikan parameter-parameter yang digunakan pada model matematika mangsa-pemangsa diantaranya kelahiran, kematian alami dan faktor interaksi mangsa-pemangsa.
b) Membentuk model matematika, yaitu model mangsa-pemangsa berdasarkan asumsi pada point a.
c) Menyelesaikan sistem persamaan differensial.
d) Menentukan titik kesetimbangan (*equilibrium*) model mangsa-pemangsa yang telah ditentukan pada point b. Titik kesetimbangan yang akan dicari adalah titik kesetimbangan trivial (asal), titik kesetimbangan bebas mangsa sakit dan pemangsa, dan titik kesetimbangan endemik mangsa dan pemangsa.
e) Menganalisa sifat kesetabilan titik kesetimbangan dari model mangsa-pemangsa dari point d. Setelah titik kesetimbangan diperoleh, maka langkah selanjutnya adalah menyelidiki kesetabilan dari titik kesetimbangan yang akan dicari yaitu titik kesetimbangan trivial (asal), titik kesetimbangan bebas mangsa sakit dan pemangsa, dan titik kesetimbangan endemik mangsa dan pemangsa. Dalam melakukan penganalisaan sifat kesetabilan titik kesetimbangan maka digunakan metode liniearisasi pada sistem dengan menggunakan matriks Jacobian di titik kesetimbangan. Kemudian dengan menggunakan definisi polinomial karakteristik diperoleh nilai eigen-nilai eigen dari matriks Jacobian sehingga dapat di tentukan sifat kesetabilannya menurut teorema 2.1 . Salah satu alternatif di dalam menentukan nilai eigen-nilai eigan dari poliniomial karakteristik adalah dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.
f) Mensimulasikan model rantai makanan mangsa-pemangsa yang telah di bentuk dengan menggunakan program Maple 13.

BAB IV
PEMBAHASAN

Pemodelan matematika merupakan suatu alat yang dapat digunakan untuk mendeskripsikan permasalahan-permasalahan yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari kedalam bentuk yang metematis. Dengan pemodelan metematika, permasalahan-permasalahan tersebut diharapkan menjadi lebih mudah untuk diselesaikan.

Pemodelan matematika pada umumnya dapat juga digunakan untuk memeodelkan interaksi mangsa-pemangsa dalam suatu populasi. Pada bab ini dibahas mengenai model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit. Dari model yang diperoleh, ditentukan titik keseimbangannya dan parameter yang dapat digunakan untuk mengetahui peningkatan ataupun penurunan jumlah yang dimangsa. Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan terhadap titik kesetimbangan dengan menggunakan teorema-teorema.

Pada model mangsa-pemangsa dibagi menjadi tiga kelas yaitu, $X(t)$ menyatakan kelas mangsa yang rentan $Y(t)$ menyatakan kelas populasi mangsa yang telah terinfeksi dan $Z(t)$ menyatakan predator dimana untuk t menyatakan waktu

4.1 Asumsi-asumsi dan Bentuk Model Mangsa-Pemangsa

Penelitian pada model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit ini menggunakan model logistik. Karena pada kenyataan laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada jumlah populasi pada saat sekarang ini, tetapi juga bergantung kepada jumlah populasi sebalumnya.

Adapun asumsi-asumsi pada model matematika Mangsa-Pemangsa dengan sebagian mangsa sakit adalah sebagai berikut:

a). Dengan adanya kehadiran penyakit yang menyebar dengan laju P sehingga untuk populasi mangsa dibagi menjadi dua kelas yakni $X(t)$ menyatakan kelas mangsa yang rentan, $Y(t)$ menyatakan kelas populasi mangsa yang telah terinfeksi sedangkan t merupakan waktu.

b). Tanpa adanya penyakit dan pemangsa dengan pertumbuhan populasi mangsa r $r > 0$ mengikuti pertumbuhan logistik, dengan daya dukung lingkungan terhadap mangsa $K > 0$.

c). Laju penularan penyakit dari mangsa yang sakit ke mangsa yang rentan terserang penyakit yang disebabkan oleh interaksi keduanya, yang berbentuk laju penularan adalah nonliniear yaitu $\frac{PXY}{Q+X}$, dengan PXY merupakan laju penularan penyakit dari mangsa rentan terhadap mangsa terinfeksi, $\frac{1}{Q+X}$ adalah efek jenuh insidensi dari mangsa rentan secara konstan.

d). Penyebaran penyakit dengan laju P hanya terjadi diantara mangsa saja dan bukan penyakit turunan, populasi yang terinfeksi tidak akan sembuh.

e). Pemangsaan setiap individu yang terinfeksi penyakit mempunyai proporsi yang lebih besar dari pada mangsa yang rentan, karena mangsa yang terinfeksi lebih mudah akibat dari pergerakannya yang lebih lambat.

f). Para pemangsa tumbuh dengan subur pada saat mangsanya sangat banyak, akan tetapi pada akhirnya persediaan makanan pemangsa akan menurun. Ketika populasi pemangsa menurun, maka populasi mangsa akan meningkat lagi. Keadaan ini akan terus berputar (tumbuh dan turun).

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, dapat didefinisikan untuk parameter modelnya adalah sebagai berikut:

r menyatakan bahwa laju pertumbuhan/kelahiran murni pada populasi mangsa

K menyatakan bahwa daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) terhadap mangsa

P menyatakan bahwa laju penularan penyakit

γ menyatakan bahwa laju total penyerangan pemangsa

β menyatakan bahwa laju penanganan pemangsa

Q menyatakan parameter yang mengukur efek jenuh insidensi secara konstan.

e menyatakan bahwa laju perubahan ketangkasan lolos untuk mangsa

d menyatakan bahwa laju kematian pada pemangsa

Dengan adanya asumsi, variabel dan parameter di atas, maka akan di bentuk kedalam model matematika yaitu:

$$\dot{X} = rX \;\; 1 - \frac{X}{K} \;\; - \frac{PXY}{Q+X} \;, X > 0, \qquad \ldots \quad 4.1.a$$

$$\dot{Y} = \frac{PXY}{Q+X} - \frac{\gamma YZ}{Z+\gamma\beta Y} \;, Y > 0, \qquad \ldots \quad 4.1.b$$

$$\dot{Z} = \frac{e\gamma YZ}{Z+\gamma\beta Y} - dZ, Z > 0, \qquad \ldots \quad 4.1.c$$

Untuk mempermudah dalam menyelesaikan sistem persamaan 4.1 di atas, maka diperlukan penyederhanaan atau mengurangi parameter sebagai berikut:

di misalkan untuk variabael-variabel X, Y, Z adalah:

$$x = \frac{X}{K}, \;\; y = \frac{Y}{K}, \;\; z = \frac{Z}{\gamma\beta K}, \;\; t = r\tau \qquad \ldots \quad 4.2$$

dan diandaikan lagi untuk parameter-parameter:

$$k = \frac{PK}{rQ}, \;\; b = \frac{\gamma}{r}, \;\; c = \frac{e}{r\beta}, \;\; a = \frac{d}{r}, \alpha = \frac{K}{Q} \qquad \ldots \quad 4.3$$

pertamakali subtitusikan masing-masing parameter 4.2 dan 4.3 terhadap sisetm persamaan 4.1 dan untuk mendapatkan nilai $\frac{dx}{dt}$ maka dilakukan manipulasi aljabar sebagai berikut:

untuk persamaan 4.1.a :

$$\frac{dX}{dt} = rX \;\; 1 - \frac{X}{K} \;\; - \frac{PXY}{Q+X}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dxK}{r.d\tau} = r.xK \;\; 1 - \frac{xK}{K} \;\; - \frac{\frac{krQ}{K}.xK.yK}{Q+xK}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dxK}{r.d\tau} = r.xK \;\; 1 - x \;\; - \frac{krQ.xyK}{Q+x\alpha Q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{r.d\tau} = rx \;\; 1 - x \;\; - \frac{krxy}{1+\alpha x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{r.\frac{1}{r}.dt} = \frac{1}{r}.rx \;\; 1 - x \;\; - \frac{\frac{1}{r}.krxy}{1+\alpha x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = x \;\; 1 - x \;\; - \frac{kxy}{1+\alpha x} \qquad \ldots \quad 4.4.a$$

untuk persamaan 4.1. b :

$$\frac{dY}{dt} = \frac{PXY}{Q+X} - \frac{\gamma YZ}{Z+\gamma\beta Y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dyK}{r.d\tau} = \frac{\frac{krQ}{K}.xK.yK}{Q+xK} - \frac{br.yK.z\gamma\beta K}{z\gamma\beta K+\gamma\beta yK}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dyK}{r.d\tau} = \frac{krQ.xyK}{Q+x\alpha Q} - \frac{br.yK.z}{z+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{r.d\tau} = \frac{krxy}{1+\alpha x} - \frac{bryz}{z+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{r.\frac{1}{r}.dt} = \frac{\frac{1}{r}.krxy}{1+\alpha x} - \frac{\frac{1}{r}.bryz}{z+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{kxy}{1+\alpha x} - b\frac{yz}{z+y} \qquad \ldots \quad 4.4.b$$

untuk persamaan 4.1. c :

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{e\gamma YZ}{Z+\gamma\beta Y} - dZ$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz\beta\gamma K}{r.d\tau} = \frac{cr\beta.\gamma.yK.\gamma\beta zK}{\gamma\beta zK+\gamma\beta yK} - ar.\gamma\beta zK$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz\beta\gamma K}{r.d\tau} = \frac{cr\beta\gamma.yK.z}{z+y} - ar.\gamma\beta zK$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{r.d\tau} = \frac{cryz}{z+y} - ar.z$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{r.\frac{1}{r}.dt} = \frac{\frac{1}{r}.cryz}{z+y} - \frac{1}{r}.arz$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = c\frac{yz}{z+y} - az \qquad \ldots \quad 4.4.c$$

dari penyelesaian di atas maka sistem persamaan 4.1 menjadi:

$$\dot{x} = x\;1 - x\; - \frac{kxy}{1+\alpha x} \qquad 4.4.\text{a}$$

$$\dot{y} = \frac{kxy}{1+\alpha x} - b\frac{yz}{z+y} \qquad 4.4.b$$

$$\dot{z} = c\frac{yz}{z+y} - az \qquad 4.4.c$$

4.2 Titik Kesetimbangan $\boldsymbol{Equilibrium}$

Titik kesetimbangan dari sistem (4.2) dapat di peroleh dengan menjadikan ruas kanan masing-masing persamaan sama dengan nol, atau $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$.

Titik kesetimbangan yang akan dicari ada tiga yaitu:

1. Titik kesetimbangan trivial atau asal.

   Titik kesetimbangan asal adalah dimana keberadaan untuk populasi itu masih di katakan musnah atau mati. Dalam arti kata tidak ada mangsa sehat, mangsa sakit dan pemangsa yang hidup maka untuk jumlah mangsa sehat $x^* = 0$, jumlah mangsa sakit $y^* = 0$, jumlah pemangsa $z^* = 0$ sehingga dapat ditulis $E_0^* = (0,0,0)$.

2. Titik kesetimbangan bebas mangsa sakit dan pemangsa.

   Titik kesetimbangan bebas mangsa sakit dan pemangsa berarti di dalam populasi, hanya terdapat mangsa sehat namun tidak ada satu pun mangsa sakit dan pemangsa jadi untuk $x^* = 1, y^* = 0, z^* = 0$, sehingga dapat di tulis kembali sebagai berikut $E_1^* = (1,0,0)$.

3. Titik kesetimbangan endemik mangsa dan pemangsa

   Titik kesetimbangan endemik mangsa dan pemangsa artinya di dalam populasi selalu terdapat mangsa sehat, mangsa yang sakit, sehingga adanya interaksi mangsa-pemangsa. Titik kesetimbangan endemik pada populasi mangsa-pemangsa akan terjadi apabila tingkat populasi tidak berubah.

   Untuk mendapatkan titik kesetimbangan endemik mangsa-pemangsa maka persamaan $(4.4.a) - (4.4.b)$ disamadengankan dengan nol, sebagai berikut:

   Pertamakali didefinisikan untuk $x(1 - x) = \frac{kxy}{1+\alpha x} = b\frac{yz}{z+y}$ dan $\frac{yz}{z+y} = \frac{a}{c}z$

   a). Untuk memperoleh titik kesetimbangan y^* maka dari persamaan $(4.4.a)$:

   $$x(1 - x) - \frac{kxy}{1+\alpha x} = 0$$

   $$\Leftrightarrow \quad x - x^2 - \frac{kxy}{1+\alpha x} = 0$$ dan untuk $x \neq 0$

$$1-x-\frac{ky}{1+\alpha x}=0$$

$$1-x=\frac{ky}{1+\alpha x}$$

$$ky=(1-x)(1+\alpha x)$$

$$y=\frac{(1-x)(1+\alpha x)}{k}$$

sehingga y untuk titik ekulibrium yang dinotasikan pada $y^*=\frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{k}$

b). Untuk persamaan $(4.4.c)$ yakni pada populasi pemangsa:

$c\frac{yz}{z+y}-az=0$ dan untuk $z\neq 0$

$$\frac{y}{z+y}=\frac{a}{c}$$

$$a(z+y)=yc$$

$$az+ay=yc$$

$$az=yc-ay$$

$$z=\frac{(c-a)y}{a}$$

sehingga z untuk titik ekulibrium yang dinotasikan pada $z^*=\left(\frac{c}{a}-1\right)y^*$

c). Untuk persamaan $(4.4.b)$ yakni pada populasi mangsa sakit:

$$\frac{kxy}{1+\alpha x}-b\frac{yz}{z+y}=0$$

$$x(1-x)=b\frac{a}{c}z$$

$$x(1-x)=b\frac{a}{c}\left(\frac{c}{a}-1\right)\left(\frac{(1-x)(1+\alpha x)}{k}\right)$$

$$x=b\frac{a}{c}\left(\frac{c}{a}-1\right)\left(\frac{1}{k}+\frac{\alpha x}{k}\right)$$

$$x-\frac{\alpha x}{k}=b\frac{a}{c}\left(\frac{c}{a}-1\right)\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\frac{kx-\alpha x}{k} = b\frac{a}{c}\left(\frac{c}{a}-1\right)\frac{1}{k}$$

$$kx-\alpha x = b\frac{a}{c}\left(\frac{c}{a}-1\right)$$

$$x(k-\alpha) = b-\frac{ba}{c}$$

$$x = \frac{b}{k-\alpha}-\frac{ba}{c(k-\alpha)}$$

sehingga x untuk titik ekulibrium yang dinotasikan pada $x^{*} = \frac{b}{k-\alpha}-\frac{ba}{c(k-\alpha)}$

Berdasarkan penyelesaian di atas, maka diperoleh titik kesetimbangan selalu ada mangsa sehat, mangsa sakit dan pemangsa adalah $E_2^{*} = \left(x^{*} = \frac{b}{k-\alpha}-\frac{ba}{c(k-\alpha)}, y^{*} = \frac{(1-x^{*})(1+\alpha x^{*})}{k}, z^{*} = \left(\frac{c}{a}-1\right)y^{*}\right)$, hal ini berarti bahwa untuk semua populasi berada pada kondisi $(c > a)$, $(1 > x^{*})$.

4.3 Kestabialn Titik Kesetimbangan

Setelah diperoleh titik kesetimbangan dari sistem (4.2), maka langkah selanjutnya akan diselidiki kestabilan titik kesetimbangan pada model matematika mangsa-pemangsa dengan menggunakan liniearisasi. Untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan pada model tersebut perlu ditentukan terlebih dahulu matriks Jacobian dapat dilihat uraian di bawah ini:

Misalkan:

$$f(x,y,z) = x(1-x)-\frac{kxy}{1+\alpha x} = x-x^2-\frac{kxy}{1+\alpha x}$$

$$g(x,y,z) = \frac{kxy}{1+\alpha x}-b\frac{yz}{z+y}$$

$$h(x,y,z) = c\frac{yz}{z+y}-az$$

Kemudian untuk masing-masing fungsi persamaan diatas diturunkan secara parsial terhadap variabel pada fungsi tersebut, seperti dibawah ini:

- Fungsi $f(x,y,z)$ terhadap variabel x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\left(x-x^2-\frac{kxy}{1+\alpha x}\right)}{\partial x}$$

Di misalkan $u = kxy \Rightarrow u' = ky$

$v = 1 + \alpha x \Rightarrow v' = \alpha$

$$= 1 - 2x - \frac{ky\ 1+\alpha x\ - kx\alpha y}{1+\alpha x\ ^2}$$

$$= 1 - 2x - \frac{ky}{1+\alpha x\ ^2}$$

- Fungsi $f(x, y, z)$ terhadap variabel y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x - x^2 - \frac{kxy}{1+\alpha x}}{\partial y}$$

Di misalkan $u = kxy \Rightarrow u' = kx$

$v = 1 + \alpha x \Rightarrow v' = 0$

$$= -\frac{kx\ 1+\alpha x}{1+\alpha x\ ^2}$$

$$= -\frac{kx}{1+\alpha x}$$

- Fungsi $f(x, y, z)$ terhadap variabel z :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x - x^2 - \frac{kxy}{1+x}}{\partial z} = 0$$

- Fungsi $g(x, y, z)$ terhadap variabel x :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\frac{kxy}{1+\alpha x} - b\frac{yz}{z+y}}{\partial x}$$

Di misalkan $u = kxy \Rightarrow u' = ky$

$v = 1 + \alpha x \Rightarrow v' = \alpha$

$$= \frac{ky\ 1+\alpha x\ - k\alpha xy}{1+\alpha x\ ^2}$$

$$= \frac{ky}{1+\alpha x\ ^2}$$

- Fungsi $g(x, y, z)$ terhadap variabel y :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\frac{kxy}{1+\alpha x} - b\frac{yz}{z+y}}{\partial y}$$

Di misalkan $u = kxy \Rightarrow u' = kx$, dan $u = yz \Rightarrow u' = z$

$v = 1 + x \Rightarrow v' = 0$, dan $v = z + y \Rightarrow v' = 1$

$$= \frac{kx\ 1+\alpha x}{1+\alpha x\ ^2} - b\frac{z\ z+y\ - yz}{z+y\ ^2}$$

$$= \frac{kx(1+\alpha x)}{(1+\alpha x)^2} - b\frac{z^2}{(z+y)^2}$$

$$= \frac{kx}{1+\alpha x} - b\frac{z^2}{(z+y)^2}$$

- Fungsi $g(x, y, z)$ terhadap variabel z :

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\frac{kxy}{1+\alpha x} - b\frac{yz}{z+y}}{\partial z}$$

Di misalkan $u = yz \quad \Rightarrow u' = y$

$$v = z + y \Rightarrow v' = 1$$

$$= -b\frac{y(z+y) - yz}{(z+y)^2}$$

$$= -b\frac{y^2}{(z+y)^2}$$

- Fungsi $h(x, y, z)$ terhadap variabel x :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{c\frac{yz}{z+y} - az}{\partial x} = 0$$

- Fungsi $h(x, y, z)$ terhadap variabel y :

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{c\frac{yz}{z+y} - az}{\partial y}$$

Di misalkan $u = yz \quad \Rightarrow u' = z$

$$v = z + y \Rightarrow v' = 1$$

$$= c\frac{z(z+y) - yz}{(z+y)^2}$$

$$= c\frac{z^2}{(z+y)^2}$$

- Fungsi $h(x, y, z)$ terhadap variabel z :

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{c\frac{yz}{z+y} - az}{\partial z} - a$$

Di misalkan $u = yz \quad \Rightarrow u' = y$

$$v = z + y \Rightarrow v' = 1$$

$$= c\frac{y(z+y) - yz}{(z+y)^2} - a$$

$$= c\frac{y^2}{(z+y)^2} - a$$

Selanjutnya dibentuk kedalam matriks jacobian, sebagai berikut:

$$Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix}$$

setelah masing-masing fungsi persamaan diturunkan secara parsial terhadap variabelnya, maka matriks $Jf(x,y,z)$ di atas menjadi:

$$Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1-2x-\frac{ky}{(1+\alpha x)^2} & -\frac{kx}{1+\alpha x} & 0 \\ \frac{ky}{(1+\alpha x)^2} & \frac{kx}{1+\alpha x} - b\frac{z^2}{(z+y)^2} & -b\frac{y^2}{(z+y)^2} \\ 0 & c\frac{z^2}{(z+y)^2} & c\frac{y^2}{(z+y)^2} - a \end{bmatrix} \quad \ldots (4.5)$$

Untuk mengetahui sifat titik kesetimbangan dimasa yang akan mendatang, maka titik kesetabilan harus di uji kesetabilannya terlebih dahulu melalui liniearisasi nilai eigen-nilai eigen. Hal ini dapat dilakukan dengan cara mensubtitusikan setiap titik kesetimbangan $E_0^*(0,0,0)$, $E_1^*(1,0,0)$ dan $E_2^*\left(x^* = \frac{b}{k-\alpha} - \frac{ba}{c(k-\alpha)}, y^* = \frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{k}, z^* = \left(\frac{c}{a}-1\right)y^*\right)$ terhadap matriks Jakobian (4.5) di atas sebagai berikut:

1. Kestabilan Titik Kestimbangan Trivial atau E_0^*

Kestabilan titik kestimbangan trivial atau E_0^* adalah dengan mensubtitusikan nilai $E_0^* = (0,0,0)$ pada matriks $Jf(x,y,z)$ sebagai berikut:

$$Jf(x^*,y^*,z^*) = \begin{bmatrix} 1-2(0)-\frac{k(0)}{(1+(0))^2} & -\frac{k(0)}{1+(0)} & 0 \\ \frac{k(0)}{(1+(0))^2} & \frac{k(0)}{1+(0)} - b\frac{(0)^2}{((0)+(0))^2} & -b\frac{(0)^2}{((0)+(0))^2} \\ 0 & c\frac{(0)^2}{((0)+(0))^2} & c\frac{(0)^2}{((0)+(0))^2} - a \end{bmatrix}$$

$$Jf(x^*,y^*,z^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

Setelah matriks jacobian dilengkapi maka langkah selanjutnya, yaitu mencari nilai $det\left(\lambda I - Jf\left(x^*, y^*, z^*\right)\right) = 0$ untuk memperoleh nilai eigen-nilai eigen dari matriks sebagai berikut:

$$det\left(\lambda I - Jf\left(x^*, y^*, z^*\right)\right) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\lambda I - Jf\left(x^*, y^*, z^*\right)\right) = det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + a \end{bmatrix} = 0 \qquad \ldots \quad (4.6)$$

dari penyelesaian determinan matriks (4.6) di atas sehingga diperoleh untuk persamaan karakteristiknya yaitu $(\lambda - 1)(\lambda)(\lambda + a) = 0$. Sehingga dapat ditentukan untuk nilai eigen-nilai eigen dari persamaan karakteristiknya adalah $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 = 0$, dan $\lambda_3 < -a$, maka berdasarkan teorema (2.1) maka titik kestimbangan $E_0^*(0,0,0)$ adalah tidak stabil. Hal ini berarti di dalam waktu yang cukup lama tidak ada populasi mangsa sehat dan sakit yang akan bertahan hidup, sehingga akan terjadi untuk semua populasi pemangsa juga akan mati.

2. Kestabilan Titik Kestimbangan Bebas Mangsa Sakit dan Pemangsa atau E_1^*

Kestabilan titik kestimbangan bebas mangsa sakit dan pemangsa atau E_1^* akan di cari dengan mensubtitusikan nilai $E_1^* = (1,0,0)$ sebagai berikut:

$$Jf\left(x^*, y^*, z^*\right) = \begin{bmatrix} 1 - 2(1) - \frac{k(0)}{(1+(1))^2} & -\frac{k(1)}{1+\alpha} & 0 \\ \frac{k(0)}{(1+\alpha)^2} & \frac{k(1)}{1+\alpha} - b\frac{(0)^2}{((0)+(0))^2} & -b\frac{(0)^2}{((0)+(0))^2} \\ 0 & c\frac{(0)^2}{((0)+(0))^2} & c\frac{(0)^2}{((0)+(0))^2} - a \end{bmatrix}$$

$$Jf\left(x^*, y^*, z^*\right) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{k}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{k}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

Setelah matriks jacobian dilengkapi maka langkah selanjutnya, yaitu mencari nilai $det\left(\lambda I - Jf\left(x^*, y^*, z^*\right)\right) = 0$ untuk memperoleh nilai eigen-nilai eigen dari matriks sebagai berikut:

$$det\left(\lambda I - Jf\left(x^*, y^*, z^*\right)\right) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\lambda I - Jf\left(x^*, y^*, z^*\right)\right) = det\begin{bmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{k}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + a \end{bmatrix} = 0 \qquad \ldots \quad (4.7)$$

dari penyelesaian matriks (4.5) di atas sehingga diperoleh untuk persamaam karakteristiknya adalah $(\lambda + 1)\left(\lambda - \frac{k}{1+\alpha}\right)(\lambda + a) = 0.$

Sehingga dapat di tentukan untuk nilai eigen-nilai eigen dari persamaan karakteristiknya adalah $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = \frac{k}{1+\alpha} > 0$, dan $\lambda_3 = -a < 0$, jadi menurut teorema (2.1) maka untuk titik kestimbangan $E_1^* = (1,0,0)$ tidak stabil. Hal ini dapat di simpulkan bahwa untuk waktu yang sangat lama ketika populasi mangsa sehat bisa bertahan hidup dan mangsa sakit tidak bisa bertahan hidup, sehingga akan terjadi bahwa untuk populasi pemangsa juga tidak akan bisa bertahan hidup.

3. Kestabilan Titik Kestimbangan Endemik Mangsa dan Pemangsa atau E_2^*

Teorema $(\mathbf{4.1})$: Jika $\frac{2(k+\alpha-1)}{\alpha} < x^* < \frac{1}{2}$ maka titik kestimbangan endemik mangsa dan pemangsa atau E_2^* adalah stabil asimtotik.

Bukti:

Kestabilan titik kestimbangan endemik mangsa dan pemangsa atau E_2^* akan diperoleh dengan mensubtitusikan nilai $E_2^* = \left(x^* = \frac{b}{k-\alpha} - \frac{ba}{c(k-\alpha)}, y^* = \frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{k}, z^* = \left(\frac{c}{a} - 1\right)y^*\right)$ pada matriks

$$Jf\,(x^*, y^*, z^*) = \begin{bmatrix} 1 - 2x^* - \frac{ky^*}{(1+\alpha x^*)^2} & -\frac{kx^*}{1+\alpha x^*} & 0 \\ \frac{ky^*}{(1+\alpha x^*)^2} & \frac{kx^*}{1+\alpha x^*} - b\frac{z^{*2}}{(z^*+y)^2} & -b\frac{y^{*2}}{(z^*+y^*)^2} \\ 0 & c\frac{z^{*2}}{(z^*+y^*)^2} & c\frac{y^{*2}}{(z^*+y^*)^2} - a \end{bmatrix}$$ sebagai

berikut:

Di misalkan untuk matrik (4.5) adalah matriks 3×3 adalah $\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$

untuk persamaan $M_{11} = 1 - 2x^* - \frac{ky^*}{(1+\alpha x^*)^2}$

$$= 1 - 2x^* - \frac{k\left(\frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{k}\right)}{(1+\alpha x^*)^2}$$

$$= 1 - 2x^* - \frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{(1+\alpha x^*)(1+\alpha x^*)}$$

$$= 1 - 2x^* - \frac{(1-x^*)}{1+\alpha x^*}$$

$$= \frac{1(1+\alpha x^*) - 2x^*(1+\alpha x^*) - (1-x^*)}{1+x^*}$$

$$= \frac{1+\alpha x^* - 2x^* - 2\alpha x^{*2} - 1 + x^*}{1+x^*}$$

$$= \frac{\alpha x^* - 2\alpha x^{*2} - x^*}{1+x^*}$$

untuk persamaan matriks $M_{12} = -\frac{kx^*}{1+\alpha x^*}$

untuk persamaan matriks $M_{13} = 0$

untuk persamaan matriks $M_{21} = \frac{ky^*}{(1+\alpha x^*)^2}$

$$= \frac{k\left(\frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{k}\right)}{(1+\alpha x^*)^2}$$

$$= \frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{(1+\alpha x^*)(1+\alpha x^*)}$$

$$= \frac{1-x^*}{1+\alpha x^*}$$

untuk persamaan matriks $M_{22} = \frac{kx^{*}}{1+\alpha x^{*}} - b\frac{z^{*2}}{(y^{*}+z^{*})^{2}}$

$$= \frac{kx^{*}}{1+\alpha x^{*}} - \frac{b\left(\left(\frac{c}{a}-1\right)y^{*}\right)^{2}}{(y^{*}+z^{*})^{2}}$$

$$= \frac{kx^{*}}{1+\alpha x^{*}} - \frac{b\left(\frac{c}{a}-1\right)^{2}y^{*2}}{(y^{*}+z^{*})^{2}}$$

$$= \frac{kx^{*}}{1+\alpha x^{*}} - b\left(\frac{c}{a}-1\right)^{2}.\ 0$$

$$= \frac{kx^{*}}{1+\alpha x^{*}} - b\left(\frac{c^{2}}{a^{2}}-\frac{c}{a}-\frac{c}{a}-1\right).\ 0$$

$$= \frac{kx^{*}}{1+\alpha x^{*}} - b\ 0$$

$$= \frac{kx^{*}}{1+\alpha x^{*}}$$

untuk persamaan matriks $M_{23} = -b\frac{y^{*2}}{(z^{*}+y^{*})^{2}} = -b\ (0) = 0$

$$y^{*2} = \left(\frac{(1-x^{*})(1+\alpha x^{*})}{k}\right)^{2}$$

$$y^{*2} = \left(\frac{1}{k}+\frac{\alpha x^{*}}{k}-\frac{x^{*}}{k}-\frac{\alpha x^{*2}}{k}\right)\left(\frac{1}{k}+\frac{\alpha x^{*}}{k}-\frac{x^{*}}{k}-\frac{\alpha x^{*2}}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{k^{2}}+\frac{\alpha^{2}x^{*2}}{k^{2}}+\frac{x^{*2}}{k^{2}}+\frac{\alpha^{2}x^{*4}}{k^{2}}+\frac{\alpha x^{*}}{k^{2}}+\frac{\alpha x^{*}}{k^{2}}-\frac{x^{*}}{k^{2}}-\frac{x^{*}}{k^{2}}-\frac{\alpha x^{*2}}{k^{2}}-\frac{\alpha x^{*2}}{k^{2}}-\frac{\alpha x^{*2}}{k^{2}}-\frac{\alpha x^{*2}}{k^{2}}+\frac{\alpha x^{*3}}{k^{2}}+\frac{\alpha x^{*3}}{k^{2}}-\frac{\alpha^{2}x^{*3}}{k^{2}}-\frac{\alpha^{2}x^{*3}}{k^{2}}$$

$$(z^{*}+y^{*})^{2} = \left(\left(\frac{c}{a}-1\right)\left(\frac{(1-x^{*})(1+\alpha x^{*})}{k}\right)+\frac{(1-x^{*})(1+\alpha x^{*})}{k}\right)^{2}$$

$$= \left(\frac{c}{a}\left(\frac{(1-x^{*})(1+\alpha x^{*})}{k}\right)-\frac{(1-x^{*})(1+\alpha x^{*})}{k}+\frac{(1-x^{*})(1+\alpha x^{*})}{k}\right)^{2}$$

$$= \left(\frac{c(1+\alpha x^{*}-x^{*}-\alpha x^{*2})}{ak}\right)\left(\frac{c(1+\alpha x^{*}-x^{*}-\alpha x^{*2})}{ak}\right)$$

$$= \frac{c^{2}}{a^{2}k^{2}}+\frac{c^{2}\alpha^{2}x^{*2}}{a^{2}k^{2}}+\frac{c^{2}x^{*2}}{a^{2}k^{2}}+\frac{c^{2}\alpha^{2}x^{*4}}{a^{2}k^{2}}+\frac{c^{2}\alpha x^{*}}{a^{2}k^{2}}+\frac{c^{2}\alpha x^{*}}{a^{2}k^{2}}-\frac{c^{2}x^{*}}{a^{2}k^{2}}-\frac{c^{2}x^{*}}{a^{2}k^{2}}-\frac{c^{2}\alpha x^{*2}}{a^{2}k^{2}}-\frac{c^{2}\alpha x^{*2}}{a^{2}k^{2}}-\frac{c^{2}\alpha x^{*2}}{a^{2}k^{2}}-\frac{c^{2}\alpha x^{*2}}{a^{2}k^{2}}+\frac{c^{2}\alpha x^{*3}}{a^{2}k^{2}}+\frac{c^{2}\alpha x^{*3}}{a^{2}k^{2}}-\frac{c^{2}\alpha^{2}x^{*3}}{a^{2}k^{2}}-\frac{c^{2}\alpha^{2}x^{*3}}{a^{2}k^{2}}$$

$$\frac{y^2}{(z+y)^2} = \frac{a^2k^2}{c^2k^2} + \frac{\alpha^2x^{*2}a^2k^2}{c^2\alpha^2x^{*2}k^2} + \frac{a^2k^2x^{*2}}{c^2x^{*2}k^2} + \frac{a^2k^2\alpha^2x^{*4}}{c^2\alpha^2x^{*4}k^2} + \frac{a^2k^2\alpha x^{*}}{c^2\alpha x^{*}k^2} + \frac{a^2k^2\alpha x^{*}}{c^2\alpha x^{*}k^2} -$$

$$\frac{a^2k^2x^{*}}{c^2x^{*}k^2} - \frac{a^2k^2x^{*}}{c^2x^{*}k^2} - \frac{a^2k^2\alpha x^{*2}}{c^2\alpha x^{*2}k^2} - \frac{a^2k^2\alpha x^{*2}}{c^2\alpha x^{*2}k^2} - \frac{a^2k^2\alpha x^{*2}}{c^2\alpha x^{*2}k^2} - \frac{a^2k^2\alpha x^{*2}}{c^2\alpha x^{*2}k^2} -$$

$$\frac{a^2k^2\alpha^2x^{*3}}{c^2\alpha^2x^{*3}k^2} - \frac{a^2k^2\alpha^2x^{*3}}{c^2\alpha^2x^{*3}k^2} + \frac{a^2k^2\alpha x^{*3}}{c^2\alpha x^{*3}k^2} + \frac{a^2k^2\alpha x^{*3}}{c^2\alpha x^{*3}k^2}$$

$$= 0$$

untuk persamaan matriks $M_{31} = 0$

untuk persamaan matriks $M_{32} = c\frac{y^{*2}}{(z^*+y^*)^2}$

$$= \frac{c\left(\left(\frac{c}{a}-1\right)y^*\right)^2}{(z^*+y^*)^2}$$

$$= c\frac{\left(\frac{c}{a}-1\right)^2 y^{*2}}{(z^*+y^*)^2}$$

$$= c\left(\frac{c}{a}-1\right)^2 .\ 0$$

$$= c\left(\frac{c^2}{a^2}-\frac{c}{a}-\frac{c}{a}+1\right) .\ 0$$

$$= c(0)$$

$$= 0$$

untuk persamaan matriks $M_{33} = c\frac{y^{*2}}{(z^*+y^*)^2} - a$

$$= c(0) - a$$

$$= 0 - a$$

$$= -a$$

Oleh karena untuk $E_2^*(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{b}{k-\alpha} - \frac{ba}{c(k-\alpha)}, \frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{k}, \left(\frac{c}{a}-1\right)y^*\right)$, maka matriks (4.5) di atas berubah menjadi:

$$Jf(x^*, y^*, z^*) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha x^* - 2\alpha x^{*2} - x^*}{1+x^*} & -\frac{kx^*}{1+\alpha x^*} & 0 \\ \frac{1-x^*}{1+\alpha x^*} & \frac{kx^*}{1+\alpha x^*} & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \qquad \ldots (4.8)$$

$$\Leftrightarrow det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\alpha x^*-2\alpha x^{*2}-x^*}{1+x^*} & -\frac{kx^*}{1+\alpha x^*} & 0 \\ \frac{1-x^*}{1+\alpha x^*} & \frac{kx^*}{1+\alpha x^*} & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - \frac{\alpha x^*-2\alpha x^{*2}-x^*}{1+x^*} & \frac{kx^*}{1+\alpha x^*} & 0 \\ -\frac{1-x^*}{1+\alpha x^*} & \lambda - \frac{kx^*}{1+\alpha x^*} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\lambda - \frac{\alpha x^*-2\alpha x^{*2}-x^*}{1+x^*}\right)\left(\lambda - \frac{kx^*}{1+\alpha x^*}\right)(\lambda + a) + \left(\frac{kx^*}{1+\alpha x^*}\right)(0)(0) +$$

$$(0)\left(-\frac{1-x^*}{1+\alpha x^*}\right)(0) - \left(\frac{kx^*}{1+\alpha x^*}\right)\left(-\frac{1-x^*}{1+\alpha x^*}\right)(\lambda + a) -$$

$$\left(\lambda - \frac{\alpha x^*-2\alpha x^{*2}-x^*}{1+x^*}\right)(0)(0) - (0)\left(\lambda - \frac{kx^*}{1+\alpha x^*}\right)(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + a)\left[\left(\lambda - \frac{\alpha x^*-2\alpha x^{*2}-x^*}{1+x^*}\right)\left(\lambda - \frac{kx^*}{1+\alpha x^*}\right) - \left(\frac{kx^*}{1+\alpha x^*}\right)\left(-\frac{1-x^*}{1+\alpha x^*}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + a)\left(\lambda^2 - \frac{\lambda kx^*}{1+\alpha x^*} - \frac{\lambda \alpha x^*}{1+\alpha x^*} + \frac{\lambda x^*}{1+\alpha x^*} + \frac{\lambda 2\alpha x^{*2}}{1+\alpha x^*} + \frac{\alpha x^{*2}k}{(1+\alpha x^*)^2} - \frac{2\alpha x^{*3}k}{(1+\alpha x^*)^2} - \right.$$

$$\left.\frac{x^{*2}k}{(1+\alpha x^*)^2} - \left(-\frac{kx^*}{(1+\alpha x^*)^2} + \frac{kx^{*2}}{(1+\alpha x^*)^2}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + a)\left(\lambda^2 + \lambda\left(\frac{2\alpha x^{*2}}{1+\alpha x^*} - \frac{kx^*}{1+\alpha x^*} - \frac{\alpha x^*}{1+\alpha x^*} + \frac{x^*}{1+\alpha x^*}\right) + \left(\frac{\alpha x^{*2}k}{(1+\alpha x^*)^2} - \frac{2\alpha x^{*3}k}{(1+\alpha x^*)^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{x^{*2}k}{(1+\alpha x^*)^2} + \frac{kx^*}{(1+\alpha x^*)^2} - \frac{kx^{*2}}{(1+\alpha x^*)^2}\right)\right)$$

dari penyelesaian matrik $Jf(x^*, y^*, z^*)$ di atas maka akan diperoleh nilai eigen salah satu nilai eigen dari matriks $Jf(x^*, y^*, z^*)$ diatas adalah $\lambda = -a$, sedangkan untuk nilai-nilai eigen yang lainnya merupakan akar-akar dari polinomial adalah sebagai berikut:

$$(\lambda + a)(\lambda^2 + \lambda A + B) = 0 \qquad \ldots \quad 4.9$$

Dari akar-akar polinomial 4.9 maka untuk setiap nilai-nilai eigen A dan B adalah:

$A = \frac{2\alpha x^{*2}}{1+\alpha x^{*}} - \frac{kx^{*}}{1+\alpha x^{*}} - \frac{\alpha x^{*}}{1+\alpha x^{*}} + \frac{x^{*}}{1+\alpha x^{*}}$, dapat di tulis kembali sebagai berikut:

$$A = \frac{2\alpha x^{*2} - kx^{*} - \alpha x^{*} + x^{*}}{1+\alpha x^{*}}$$

$$A = \frac{x^{*}}{1+\alpha x^{*}}\ 2\alpha x^{*} - k - \alpha + 1$$

$$A > 0$$

$\Leftrightarrow \frac{x^{*}}{1+\alpha x^{*}}\ 2\alpha x^{*} - k - \alpha + 1 > 0$, karena $\frac{x^{*}}{1+\alpha x^{*}} > 0$ maka

$$2\alpha x^{*} - k - \alpha + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\ 2x^{*} - 1\ - k + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\ 2x^{*} - 1\ > k - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^{*} - 1 > \frac{k-1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 2x^{*} > \frac{k-1}{\alpha} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^{*} > \frac{k-1+\alpha}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^{*} > 2\frac{k-1+\alpha}{\alpha} \qquad \ldots \quad 5.0$$

jadi untuk $A > 0$ jika $x^{*} > 2\frac{k-1+\alpha}{\alpha}$.

$B = \frac{\alpha x^{*2}k}{1+\alpha x^{*}{}^{2}} - \frac{2\alpha x^{*3}k}{1+\alpha x^{*}{}^{2}} - \frac{x^{*2}k}{1+\alpha x^{*}{}^{2}} + \frac{kx^{*}}{1+\alpha x^{*}{}^{2}} - \frac{kx^{*2}}{1+\alpha x^{*}{}^{2}}$, dan dapat di tulis kembali sebagai berikut:

$$B = \frac{\alpha x^{*2}k - 2\alpha x^{*3}k - 2x^{*2}k + kx^{*}}{1+\alpha x^{*}{}^{2}}$$

$$B > 0$$

$\Leftrightarrow \frac{x^* k}{(1+\alpha x^*)^2}\left(\alpha x^* - 2\alpha x^{*2} - 2x^* + 1\right) > 0$ karena $\left(\frac{x^* k}{1+\alpha x^*}\right) > 0$ maka

$\alpha x^* - 2\alpha x^{*2} - 2x^* + 1 > 0$

$\Leftrightarrow -2\alpha x^{*2} + (\alpha - 2)x^* + 1 > 0$

$\Leftrightarrow 2\alpha x^{*2} - (\alpha - 2)x^* - 1 < 0$ ... (5.1)

untuk menentukan akar-akar $x^*_{1,2}$ dari persamaan (5.1) maka:

$$x^*_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^*_{1,2} = \frac{--(\alpha-2) \pm \sqrt{(\alpha-2)^2 - 4.2\alpha.-1}}{2.2\alpha}$$

$$x^*_{1,2} = \frac{(\alpha-2) \pm \sqrt{(\alpha-2)^2 + 8\alpha}}{4\alpha}$$

$$x^*_{1,2} = \frac{(\alpha-2) \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 8\alpha}}{4\alpha}$$

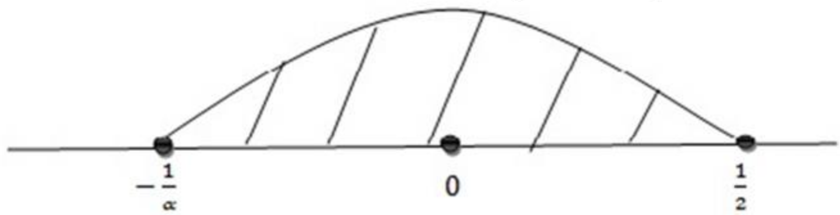
$$x^*_{1,2} = \frac{(\alpha-2) \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha + 4}}{4\alpha}$$

$$x^*_{1,2} = \frac{(\alpha-2) \pm \sqrt{(\alpha+2)^2}}{4\alpha}$$

$$x^*_1 = \frac{(\alpha-2)+(\alpha+2)}{4\alpha} = \frac{2\alpha}{4\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$x^*_2 = \frac{(\alpha-2)-(\alpha+2)}{4\alpha} = \frac{-4}{4\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$$

Jadi untuk x^* yang memenuhi $B > 0$ adalah $-\frac{1}{\alpha} < x^* < \frac{1}{2}$



Gambar: 4.1 Nilai Batas

Dari penyelesaian untuk nilai eigen-nilai eigen A dan B di atas di peroleh bahwa:

$A > 0$ jika $x^{*} > 2\frac{k-1+\alpha}{\alpha}$, dan

$B > 0$ jika $-\frac{1}{\alpha} < x^{*} < \frac{1}{2}$ atau

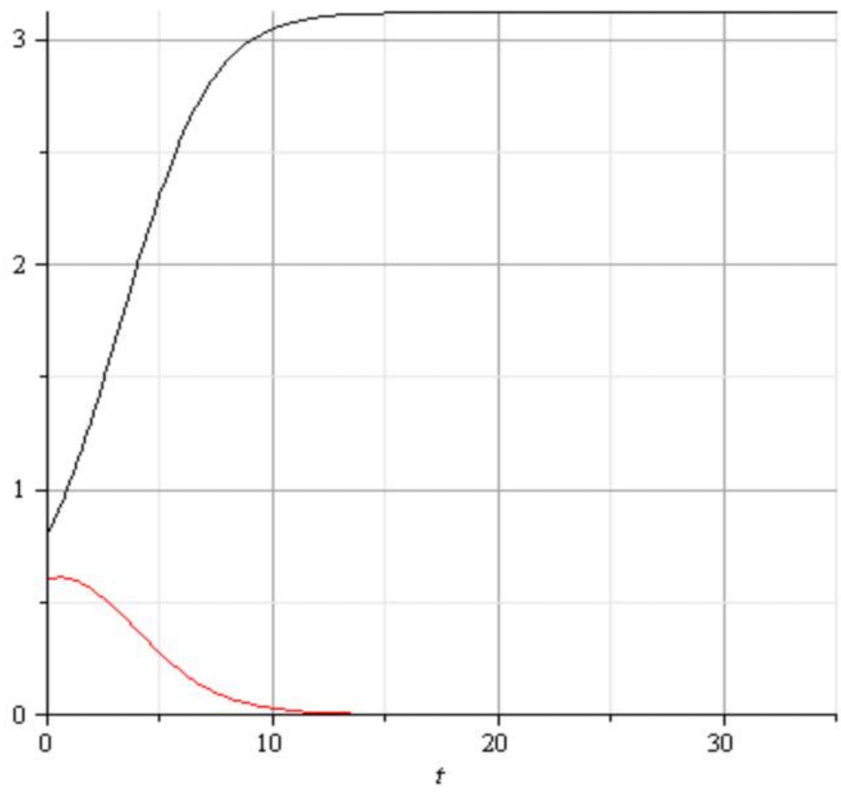
$A, B > 0$ jika $-\frac{1}{\alpha} < 2\frac{k-1+\alpha}{\alpha} < x^{*} < \frac{1}{2}$, sehingga

$A, B > 0$ jika $2\frac{k-1+\alpha}{\alpha} < x^{*} < \frac{1}{2}$.

Dari uraian di atas terbukti jika $2\frac{k-1+\alpha}{\alpha} < x^{*} < \frac{1}{2}$ maka $A > 0$ dan $B > 0$ sehingga untuk model mangsa–pemangsa dengan sebagian mangsa sakit adalah stabil asimtotik. Hal ini berarti untuk waktu yang sangat lama maka pada pertumbuhan populasi mangsa dapat bertahan hidup dan terdapat populasi mangsa sakit sehingga untuk populasi pemangsa juga bisa bertahan hidup sesuai dengan proporsi mangsanya.

4. Simulasi

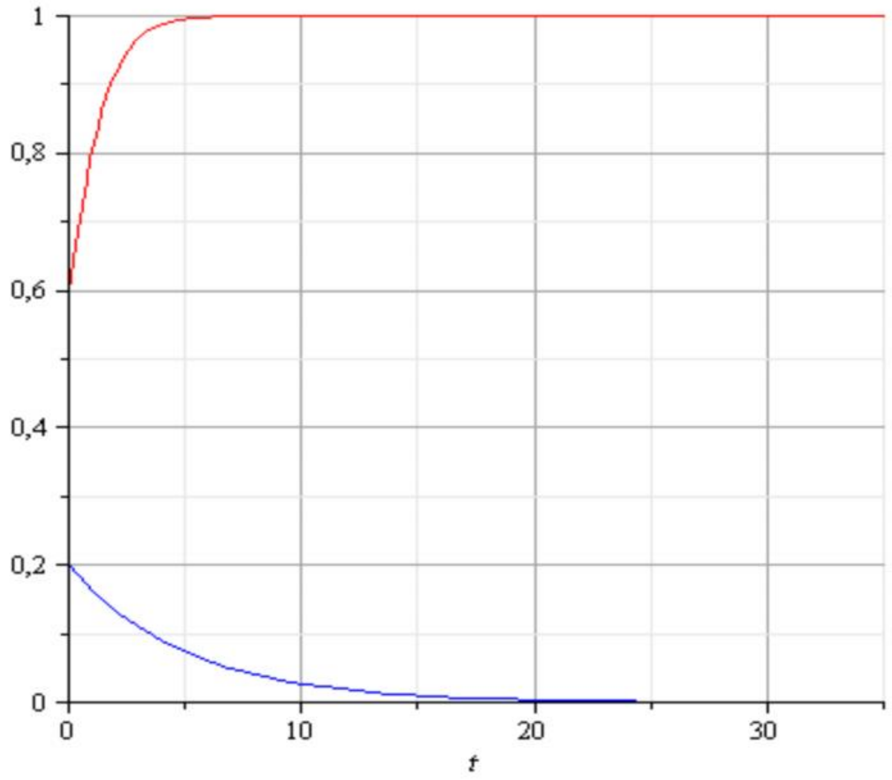
Di misalkan untuk nilai parameter-parameternya yaitu $k = 0.5, b = 0.9, c = 0.4, a = 0.2$ dan $\alpha = 0.3$ dengan nilai awalnya $x(0) = 0.6, y(0) = 0.8$ dan $z(0) = 0$. Dengan menggunakan program Maple akan di peroleh sebagai berikut:



Gambar 4.2 : Interaksi Mangsa Sehat dengan Mangsa Sakit

Dari gambar (4.2) di atas dapat di simpulkan bahwa populasi mangsa sakit bergerak naik dan dalam waktu yang lama mangsa sakit akan bergerak konstan. Sedangkan untuk populasi mangsa sehat dalam waktu yang sangat lama akan musnah.

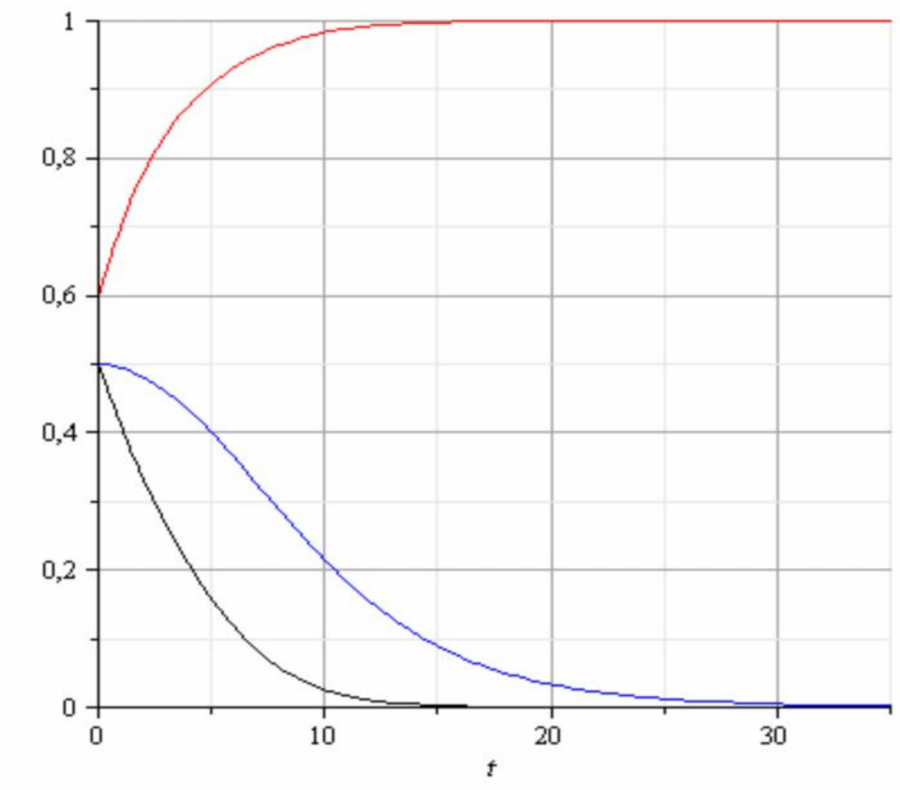
Dengan merubah nilai awalnya $x(0) = 0.6$, $y(0) = 0$ dan $z(0) = 0.2$. Maka akan diperoleh sebagai berikut:



Gambar 4.3: Interaksi Mangsa Sehat dengan Pemangsa

Pada gambar (4.3) di atas dapat di ketahui bahwa pada awalnya naik namun pada waktu yang sangat lama mangsa sehat bergerak konstan sedangkan untuk mangsa sakit menurun, hingga dalam waktu yang sangat lama mangsa sakit bergerak konstan menuju nol atau musnah.

Sedangkan untuk nilai awalnya $x(0) = 0{,}6$, $y(0) = 0{,}5$ dan $z(0) = 0{,}5$. Maka akan diperoleh sebagai berikut:



Gambar: 4.4 Interaksi Mangsa Sehat, Mangsa Sakit dan Pemangsa

Dari gambar (4.4) di atas dapat di simpulkan bahwa untuk populasi mangsa sehat pada awalnya naik, kemudian dalam waktu yang lama populasi mangsa sehat akan bergerak konstan. Sedangkan untuk populasi pemangsa menurun, sebanding dengan proporsi mangsa sakit.

BAB V

PENUTUP

Pada bab penutup ini, penulis akan menarik suatu kesimpulan berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada bab-bab sebelumnya serta penulis juga akan memberi sedikit saran kepada pembaca yang mungkin nantinya akan mengkaji tentang pemodelan matematika yaitu tentang mangsa-pemangsa.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan perhitungan dan pembahasan yang telah di lakukan pada bab 4, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit menggunakan sistem persamaan non-liniear adalah:

$$\dot{X} = rX\left(1 - \frac{X}{K}\right) - \frac{PXY}{Q+X}, x > 0$$

$$\dot{Y} = \frac{PXY}{Q+X} - \frac{\gamma YZ}{Z+\gamma\beta Y}, y > 0$$

$$\dot{Z} = \frac{e\gamma YZ}{Z+\gamma\beta Y} - dZ, z > 0$$

Dan disederhanakan lagi menjadi:

$$\dot{x} = x(1 - x) - \frac{kxy}{1+\alpha x}$$

$$\dot{y} = \frac{kxy}{1+\alpha x} - b\frac{yz}{z+y}$$

$$\dot{z} = c\frac{yz}{z+y} - az$$

Di mana $\dot{x}$ adalah mangsa sehat, $\dot{y}$ adalah mangsa sakit, $\dot{z}$ merupakan pemangsa

2. Titik kesetimbangan yang di peroleh terdiri atas tiga yaitu: titik kesetimbangan trivial atau asal $E_0^*(x^*, y^*, z^*) = (0,0,0)$, titik kesetimbangan bebas mangsa sakit dan pemangsa $E_1^*(x^*, y^*, z^*) = (1,0,0)$, dan titik kesetimbangan endemik mangsa dan pemangsa $E_2^*(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{b}{k-\alpha} - \frac{ba}{c(k-\alpha)}, \frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{k}, \left(\frac{c}{a} - 1\right)y^*\right)$.
3. Titik kesetimbangan trivial $E_0^*(x^*, y^*, z^*) = (0,0,0)$ merupakan titik kesetimabangan tidak stabil. Hal ini berarti di dalam waktu yang cukup lama tidak ada populasi mangsa sehat dan sakit yang akan bertahan

hidup, sehingga akan terjadi untuk semua populasi pemangsa juga akan mati.

4. Titik kesetimabangan $E_1^*(x^*, y^*, z^*) = (1,0,0)$ merupakan titik kesetimbangan tidak stabil, maka dapat disimpulkan bahwa untuk waktu yang sangat lama ketika populasi mangsa sehat bisa bertahan hidup dan mangsa sakit tidak bisa bertahan hidup, sehingga akan terjadi bahwa untuk populasi pemangsa juga tidak akan bisa bertahan hidup.
5. $E_3^*(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{b}{k-\alpha} - \frac{ba}{c(k-\alpha)}, \frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{k}, \left(\frac{c}{a} - 1\right) y^*\right)$ merupakan titik kesetimbangan stabil ketika untuk $A, B > 0$ jika $2\frac{k-1+\alpha}{\alpha} < x^* < \frac{1}{2}$. Hal ini berarti untuk waktu yang sangat lama maka pada pertumbuhan populasi mangsa sehat dapat bertahan hidup dan terdapat populasi mangsa sakit sehingga untuk populasi pemangsa juga bisa bertahan hidup sesuai dengan proporsi mangsanya.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini penulis mengkaji tentang model matematika mangsa-pemangsa menggunakan persamaan non-liniear yang dikerjakan dengan asumsi-asumsi tertentu, dan untuk menyelidiki kestabilan titik kesetimbangannya penulis menggunakan metode liniearisasi. Bagi pembaca yang mungkin tertarik dengan topik ini atau mengkaji lebih dalam lagi mengenai model matematika mangsa-pemangsa disarankan menggunakan asumsi-asumsi lain, misalnya dengan menambahkan adanya kematian alami pada mangsa sehat dan mangsa sakit atau adanya dua pemangsa.

DAFTAR PUSTAKA

Alebraheem, J. Dan Abu Hasan, Y. Persistence Of Predators In A Two Predators-One Prey Model With Non-Priodic Solution. *School of mathematical Sciences USM*, vol. 6, No. 19, 943-956.

Das, K.P. A Mathematical Study Of A Predator-Prey Dynamics With Diseases In Predator, *Department Of Mathematis*, India.

Fitria, vivi aida, Analisis Sistem Persamaan Differensial Model Predator-Prey Dengan Perlambatan, STIE, Asia Malang.

Hale, J. K. dan Kocak, H. *Dynamic and Bifurcation,* Springer-verlag, New York. 1991.

Kara, R. dan Can, M. Chaos In Two Food Chain Models, Istanbul Turkey.

Kamel, Naji, R. Dkk, The Dynamics Of A Prey-Predator Model With The Existence Of Diseases And Pollution, *University Of Sulalimania*, Iraq, Vol.2013, hal. 1, 94-123, 2013.

Lenzimi, Ph. dan Rebaza, J., Non-Constant Predator Harvesting on Ratio-Dependent Predator-Prey Model, *Departement of Mathematics*, Vol. 4, No. 16, hal 791-803.

Meiss, J. D. *Differential Dynamical Systems,* Society for Industrial and Applied Mathematics, USA. 2007.

Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-verlag, New York. 1991.

Rahma, Siti, Model Seir Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Migrasi, *Tugas Akhir Mahasiswi Uin Suska Riau*, Pekanbaru. 2009.

Soleh, M. dan Sriningsih Riry. Model Pemilihan Kepala Daerah dalam Kompetisi Memperoleh Dukungan (Responden)

Widodo, *Pengantar Model Matematika*, FMIPA UGM, Yogyakarta. 2007.

Wuhaib, S. A. dan Abu Hasan, Y., *A Prey Predator Model With Vulnerable Infected Prey*, Applied Mathematical Sciences, Vol.6, 107, 5333-5348, 2012.